JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 82, 177–204 (1995)

Une Caractérisation des Polynômes d-Orthogonaux "Classiques"

KHALFA DOUAK AND PASCAL MARONI

Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire d'Analyse Numérique, Tour 55-65, 5ème étage, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

Communicated by Alphone P. Magnus

Received June 3, 1992; accepted in revised form August 2, 1994

We give a characterization of "classical" d-orthogonal polynomials through a vectorial functional equation. A sequence of monic polynomials $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ is called d-simultaneous orthogonal or simply d-orthogonal if it fulfils the following $d+1$-st order recurrence relation:

$$B_{m+d+1}(x)=(x-\beta_{m+d})\,B_{m+d}(x)-\sum_{\nu=0}^{d-1}\gamma_{m+d-\nu}^{d-1-\nu}B_{m+d-1-\nu}(x),\qquad m\geqslant 0,$$

$$\gamma_{m+1}^{0}\neq 0,\qquad m\geqslant 0$$

with the initial conditions

$$\begin{cases} B_0(x)=1, \quad B_1(x)=x-\beta_0 \quad \text{and if} \quad d\geqslant 2: \\ B_n(x)=(x-\beta_{n-1})\,B_{n-1}(x)-\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-2}\gamma_{n-1-\nu}^{d-1-\nu}B_{n-2-\nu}(x), \qquad 2\leqslant n\leqslant d. \end{cases}$$

Denoting by $\{\mathscr{L}_n\}_{n\geqslant 0}$ the dual sequence of $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$, defined by $\langle \mathscr{L}_n, B_m\rangle=\delta_{n,m}$, $n, m\geqslant 0$, then the sequence $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ is d-orthogonal if and only if

$$\begin{cases} \langle \mathscr{L}_\alpha, x^m B_n(x)\rangle = 0, \qquad n\geqslant md+\alpha+1, \qquad m\geqslant 0, \\ \langle \mathscr{L}_\alpha, x^m B_{md+\alpha}(x)\rangle \neq 0, \qquad m\geqslant 0, \end{cases}$$

for any integer α with $0\leqslant\alpha\leqslant d-1$. Now, the d-orthogonal sequence $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ is called "classical" if it satisfies the Hahn's property, that is, the sequence $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ is also d-orthogonal where $Q_n(x)=(n+1)^{-1}\,B'_{n+1}(x)$, $n\geqslant 0$ is the monic derivative. If Λ denotes the vector ${}^t(\mathscr{L}_0, \mathscr{L}_1, ..., \mathscr{L}_{d-1})$, the main result is the following: the d-orthogonal sequence $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ is "classical" if and only if, there exist two $d\times d$ polynomial matrices $\Psi=(\psi_{\nu,\mu})$, $\Phi=(\phi_{\nu,\mu})$, $\deg\psi_{\nu,\mu}\leqslant 1$, $\deg\phi_{\nu,\mu}\leqslant 2$ such that

$$\Psi\Lambda + D(\Phi\Lambda)=0$$

with conditions about regularity (see below). Moreover, some examples are given.

0021-9045/95 $12.00

1. Introduction

Soit $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ une suite de polynômes normalisés $(B_n(x) = x^n + \cdots)$ et $\mathscr{L}$ une forme linéaire. La suite $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ est dite orthogonale relativement à $\mathscr{L}$ si pour tout entiers m et n, on a:

$$\langle \mathscr{L}, B_n(x)\, B_m(x) \rangle = 0, \qquad m \neq n, \qquad n, m \geqslant 0,$$
$$\langle \mathscr{L}, B_n^2(x) \rangle \neq 0, \qquad n \geqslant 0,$$

où $\langle \ ,\ \rangle$ est le crochet de dualité entre $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ($\mathscr{P}$ est l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{C}$, $\mathscr{P}'$ son dual algébrique). Une telle suite est caractérisée par le fait qu'elle vérifie une relation de récurrence d'ordre deux. Elle est dite classique si la suite des polynômes dérivées est elle-même orthogonale [8, 9].

Les récurrences d'ordre supérieur à deux interviennent dans la définition des fractions continues généralisées [4]. En particulier, les récurrences d'ordre supérieur à deux vérifiées par des suites de polynômes interviennent dans la définition des approximants de Padé vectoriels [14] ou simultanés [3].

Les polynômes orthogonaux de dimension d [10] appelés ici simplement d-orthogonaux, ou dits vectoriellement orthogonaux dans [14] à propos de la recherche des approximants de Padé (vectoriels) de d séries formelles simultanées, sont définis par une orthogonalité par rapport à d formes linéaires. Cette notion de d-orthogonalité ainsi que la $1/d$-orthogonalité [1] apparaissent comme des cas particuliers de la notion de biorthogonalité étudiée dans [2] et c'est l'une des façons, parmi l'infinité décrite dans [3], qui permet de caractériser la suite orthogonale par une relation de récurrence d'ordre $d+1$, d'un type particulier, généralisant de manière naturelle celle d'ordre deux de l'orthogonalité habituelle, obtenue pour $d = 1$ [10, 14, 15].

On peut donc, par analogie, définir les suites d-orthogonales "classiques," comme celles dont la suite des polynômes dérivés vérifie aussi une relation de récurrence d'ordre $d+1$ [5, 6].

Cette notion de polynômes d-orthogonaux "classiques" généralise d'une façon naturelle les familles de polynômes orthogonaux classiques: Hermite, Laguerre, Bessel et Jacobi obtenus lorsque $d = 1$ et qui sont caractérisés par l'équation fonctionnelle [7, 11, 12]:

$$\psi \mathscr{L} + D(\phi \mathscr{L}) = 0, \qquad (\mathscr{E})$$

avec ψ et ϕ deux polynômes vérifiant: $\deg \psi = 1$, $\deg \phi \leqslant 2$ et $\psi' - \frac{1}{2}\phi'' n \neq 0$, $n \geqslant 1$ où D est l'opérateur de dérivation défini par dualité: $\langle D\mathscr{L}, p(x) \rangle = -\langle \mathscr{L}, p'(x) \rangle$, $\forall p \in \mathscr{P}$ et de même le produit à gauche d'une forme par un polynôme: $\langle f(x)\, \mathscr{L}, p(x) \rangle = \langle \mathscr{L}, f(x)\, p(x) \rangle$, $\forall p, f \in \mathscr{P}$.

Nous démontrons ici que les polynômes d-orthogonaux "classiques" sont aussi caractérisés par une équation fonctionnelle vectorielle du type $(\mathscr{E})$:

$$\Psi\Lambda + D(\Phi\Lambda) = 0,$$

où Ψ, Φ sont deux matrices $d \times d$ de polynômes dont on précisera les degrés ultérieurement et Λ est la fonctionnelle vectorielle par rapport à laquelle la suite de polynômes est d-orthogonale.

Nous donnons ensuite quelques exemples de suites d-orthogonales "classiques" $(d \geqslant 2)$. Pour d'autres exemples, voir [1, 5, 6, 13].

2. Rappels des Définitions et Résultats Fondamentaux

Définition 2.1. A une suite quelconque de polynômes normalisés $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$, on peut toujours associer une suite duale (base duale) $\{\mathscr{L}_n\}_{n \geqslant 0}$, $\mathscr{L}_n \in \mathscr{P}'$, $n \geqslant 0$, définie par:

$$\langle \mathscr{L}_n, B_m(x) \rangle = \delta_{n,m}, \qquad n, m \geqslant 0.$$

Lemme 2.1 [10]. *Soit $\mathscr{L} \in \mathscr{P}'$ et soit $p \geqslant 1$ un entier. Pour que $\mathscr{L}$ vérifie*:

$$\langle \mathscr{L}, B_n(x) \rangle = 0, \qquad n \geqslant p,$$
$$\langle \mathscr{L}, B_{p-1}(x) \rangle \neq 0.$$

Il faut et il suffit qu'il existe $\lambda_\nu \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant \nu \leqslant p-1$, $\lambda_{p-1} \neq 0$ tels que:

$$\mathscr{L} = \sum_{\nu=0}^{p-1} \lambda_\nu \mathscr{L}_\nu. \tag{2.1}$$

Proposition 2.1 [10]. *Si $\{\tilde{\mathscr{L}}_n\}_{n \geqslant 0}$ est la suite duale de la suite $\{Q_n\}_{n \geqslant 0}$ des dérivées de $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$, définie par $Q_n(x) = (1/n+1)\, DB_{n+1}(x)$, alors on a*:

$$D\tilde{\mathscr{L}}_n = -(n+1)\, \mathscr{L}_{n+1}, \qquad n \geqslant 0, \tag{2.2}$$

avec $\langle D\tilde{\mathscr{L}}, p(x) \rangle = -\langle \tilde{\mathscr{L}}, p'(x) \rangle$, $\forall p \in \mathscr{P}$.

Définition 2.2. Soit $\Gamma^1, \Gamma^2, ..., \Gamma^d$ $(d \geqslant 1)$ d formes linéaires scalaires définies de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{C}$ et soit $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ une suite de polynômes normalisés.

On dit que la suite $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ est orthogonale de dimension d ou simplement d-orthogonale par rapport à $\Gamma = {}^t(\Gamma^1, \Gamma^2, ..., \Gamma^d)$ lorsqu'elle vérifie [14]:

$$\langle \Gamma^{\alpha}, x^{m} B_n(x) \rangle = 0, \qquad n \geqslant md + \alpha, \qquad m \geqslant 0, \tag{2.3}$$

$$\langle \Gamma^{\alpha}, x^{m} B_{md+\alpha-1}(x) \rangle \neq 0, \qquad m \geqslant 0, \tag{2.4}$$

pour chaque $1 \leqslant \alpha \leqslant d$.

La fonctionnelle vectorielle Γ est définie de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{C}^d$ par:

$$\Gamma: \mathscr{P} \to \mathbb{C}^d$$
$$\Gamma(p(x)) = {}^t(\langle \Gamma^1, p(x) \rangle, ..., \langle \Gamma^d, p(x) \rangle), \quad \forall p \in \mathscr{P}.$$

En particulier, pour $p(x) = x^n$, $n \geqslant 0$, on a:

$$\begin{aligned}\Gamma(x^n) &= {}^t(\langle \Gamma^1, x^n \rangle, ..., \langle \Gamma^d, x^n \rangle) \\ &= {}^t(\Gamma_n^1, ..., \Gamma_n^d)\end{aligned}$$

où $\Gamma_n^{\nu} = \langle \Gamma^{\nu}, x^n \rangle$, $1 \leqslant \nu \leqslant d$, $n \geqslant 0$, est le moment d'ordre n de la forme linéaire scalaire Γ^{ν}.

DÉFINITION 2.3. On dit que la fonctionnelle vectorielle Γ est régulière s'il existe une suite $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ vérifiant (2.3) et (2.4).

Remarques 2.1. (a) Les inégalités (2.4) représentant les conditions de régularité données dans [10] et qui sont équivalentes à celles données dans [3], Eq. 18, p. 78, ou bien à l'Eq. (2), p. 142 de [16].

(b) D'après le Lemme 2.1, on a: $\Gamma^{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} \lambda_{\nu}^{\alpha} \mathscr{L}_{\nu}$, $\lambda_{\alpha-1}^{\alpha} \neq 0$, $1 \leqslant \alpha \leqslant d$, c'est-à-dire de façon équivalente: $\mathscr{L}_{\nu} = \sum_{\alpha=1}^{\nu+1} \tau_{\alpha}^{\nu} \Gamma^{\alpha}$, $\tau_{\nu+1}^{\nu} \neq 0$, $0 \leqslant \nu \leqslant d-1$.

Donc, la suite $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ est aussi d-orthogonale par rapport à $\Lambda = {}^t(\mathscr{L}_0, ..., \mathscr{L}_{d-1})$.

Par conséquent, dans tout ce qui suit, on utilisera la fonctionnelle (canonique) Λ.

THÉORÈME 2.1 [10]. *Avec les notations précédentes, on a les équivalences suivantes*:

(a) *La suite* $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ *vérifie une relation de récurrence d'ordre* $d+1$ $(d \geqslant 1)$:

$$\begin{aligned} B_{m+d+1}(x) &= (x - \beta_{m+d})\, B_{m+d}(x) \\ &\quad - \sum_{\nu=0}^{d-1} \gamma_{m+d-\nu}^{d-1-\nu} B_{m+d-1-\nu}(x), \qquad m \geqslant 0, \end{aligned} \tag{R1}$$

avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} B_0(x)=1,\ B_1(x)=x-\beta_0 \text{ et si } d\geqslant 2: \\ B_n(x)=(x-\beta_{n-1})\,B_{n-1}(x)-\sum_{\nu=0}^{n-2}\gamma_{n-1-\nu}^{d-1-\nu}B_{n-2-\nu}(x), \qquad 2\leqslant n\leqslant d, \end{cases} \tag{R2}$$

avec $\gamma_{m+1}^0\neq 0$, $m\geqslant 0$ (*conditions de régularité*).

(b) *La suite* $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ *est d-orthogonale par rapport à* $\Lambda={}^t(\mathscr{L}_0,...,\mathscr{L}_{d-1})$.

(c) *Pour chaque* (n,ν), $n\geqslant 0$, $0\leqslant\nu\leqslant d-1$, *il existe d polynômes* $\Lambda^\mu(n,\nu)$, $0\leqslant\mu\leqslant d-1$, *tels que*:

$$\mathscr{L}_{nd+\nu}=\sum_{\mu=0}^{d-1}\Lambda^\mu(n,\nu)\,\mathscr{L}_\mu, \qquad n\geqslant 0,\quad 0\leqslant\nu\leqslant d-1, \tag{2.5}$$

et vérifiant

$$\begin{aligned} &\deg\Lambda^\mu(n,\mu)=n, && 0\leqslant\mu\leqslant d-1,\ \textit{et si}\ d\geqslant 2: \\ &\deg\Lambda^\mu(n,\nu)\leqslant n, && 0\leqslant\mu\leqslant\nu-1\ \textit{si}\ 1\leqslant\nu\leqslant d-1 \\ &\deg\Lambda^\mu(n,\nu)\leqslant n-1, && \nu+1\leqslant\mu\leqslant d-1\ \textit{si}\ 0\leqslant\nu\leqslant d-2. \end{aligned}$$

Remarque 2.2. Si on écrit $\Lambda^\mu(n,\mu)=\sum_{i=0}^n r_{n,i}^\mu x^i$, avec $r_{n,n}^\mu$ (coeff. de x^n) $\neq 0$, $n\geqslant 0$, car $\deg\Lambda^\mu(n,\mu)=n$, alors: $r_{n,n}^\mu=(\prod_{\nu=0}^{n-1}\gamma_{\nu d+\mu+1}^0)^{-1}$, $n\geqslant 1$; $r_{0,0}^\mu=1$.

En effet, d'après la relation (2.5), on a:

$$\langle\mathscr{L}_\mu,\Lambda^\mu(n,\mu)\,B_{nd+\mu}(x)\rangle=1, \qquad \mu=0,1,...,d-1;\quad n\geqslant 0,$$

d'où $r_{n,n}^\mu=1/\langle\mathscr{L}_\mu,x^nB_{nd+\mu}(x)\rangle=(\prod_{\nu=0}^{n-1}\gamma_{\nu d+\mu+1}^0)^{-1}$, $n\geqslant 1$; $r_{0,0}^\mu=1/\langle\mathscr{L}_\mu,B_\mu(x)\rangle=1$.

Définition 2.4. Soit d et s deux entiers non nuls et soit $\mathscr{L}\in\mathscr{P}'$. On dit que la suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ est strictement s/d-orthogonale par rapport à $\mathscr{L}$ si elle vérifie:

$$\langle\mathscr{L},B_m(x)\,B_n(x)\rangle=0, \qquad n\geqslant md+s,\quad m\geqslant 0,$$

$$\langle\mathscr{L},B_m(x)\,B_{md+s-1}(x)\rangle\neq 0, \qquad m\geqslant 0.$$

Remarque 2.3. Si la suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ est d-orthogonale par rapport à $\Lambda = {}^t(\mathscr{L}_0, ..., \mathscr{L}_{d-1})$, alors elle est $(\alpha+1)/d$-orthogonale par rapport à la forme linéaire $\mathscr{L}_\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant d-1$, et réciproquement.

THÉORÈME 2.2 [10]. *Pour chaque suite* $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ *d-orthogonale par rapport à la fonctionnelle* $\Lambda = {}^t(\mathscr{L}_0, ..., \mathscr{L}_{d-1})$ *les énoncés suivants sont équivalents*:

(a) *Il existe* $\mathscr{L} \in \mathscr{P}'$ *et* $s \geqslant 1$ *entier tels que*:

$$\langle \mathscr{L}, B_n(x)\rangle = 0, \qquad n \geqslant s,$$
$$\langle \mathscr{L}, B_{s-1}(x)\rangle \neq 0.$$

(b) *Il existe* $\mathscr{L} \in \mathscr{P}'$, $s \geqslant 1$ *et d polynômes* ϕ^α, $0 \leqslant \alpha \leqslant d-1$ *tels que*: $\mathscr{L} = \sum_{\alpha=0}^{d-1} \phi^\alpha \mathscr{L}_\alpha$ *avec les propriétés suivantes*: *si* $s-1 = qd + r$, $0 \leqslant r \leqslant d-1$, *on a*:

$$\deg \phi^r = q, \qquad 0 \leqslant r \leqslant d-1, \textit{ et si } d \geqslant 2:$$
$$\deg \phi^\alpha \leqslant q, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant r-1 \textit{ si } 1 \leqslant r \leqslant d-1,$$
$$\deg \phi^\alpha \leqslant q-1, \qquad r+1 \leqslant \alpha \leqslant d-1 \textit{ si } 0 \leqslant r \leqslant d-2.$$

(c) *Il existe* $\mathscr{L} \in \mathscr{P}'$ *et* $s \geqslant 1$ *entier tels que la suite* $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ *soit strictement* s/d*-orthogonale par rapport à* $\mathscr{L}$.

3. EQUATION FONCTIONNELLE VECTORIELLE

Considérons une suite de polynômes normalisés $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ d-orthogonale ($d \geqslant 1$) par rapport à $\Lambda = {}^t(\mathscr{L}_0, ..., \mathscr{L}_{d-1})$, dont la suite des dérivées $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$, définie par $Q_n(x) = (n+1)^{-1} B'_{n+1}(x)$, $n \geqslant 0$, est aussi d-orthogonale relativement à $\tilde{\Lambda} = {}^t(\tilde{\mathscr{L}}_0, ..., \tilde{\mathscr{L}}_{d-1})$.

DÉFINITION 3.1. La suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ est dite alors d-orthogonale "classique."

THÉORÈME 3.1. *Avec les hypothèses précédentes, les deux énoncés suivants sont équivalents*:

(a) *La suite* $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ *est d-orthogonale "classique."*

(b) *La fonctionnelle* Λ *vérifie l'équation fonctionnelle vectorielle suivante*:

$$\Psi\Lambda + D(\Phi\Lambda) = 0, \tag{3.1}$$

où Ψ et Φ sont deux matrices $d \times d$ de polynômes:

$$\Psi(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d-1 \\ \psi(x) & \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_{d-1} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

avec ψ est un polynôme de degré 1; ζ_μ, $1 \leqslant \mu \leqslant d-1$, *sont des constantes*;

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} \phi_0^0(x) & \phi_0^1(x) & \cdots & \phi_0^{d-1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{d-2}^0(x) & \phi_{d-2}^1(x) & \cdots & \phi_{d-2}^{d-1}(x) \\ \phi_{d-1}^0(x) & \phi_{d-1}^1(x) & \cdots & \phi_{d-1}^{d-1}(x) \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

avec ϕ_α^ν sont des polynômes tels que:

$$\deg \phi_\alpha^\nu \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \nu \leqslant \alpha+1 \textit{ si } 0 \leqslant \alpha \leqslant d-2,$$

$$\deg \phi_\alpha^\nu = 0, \qquad \alpha+2 \leqslant \nu \leqslant d-1 \textit{ si } 0 \leqslant \alpha \leqslant d-3,$$

$$\deg \phi_{d-1}^0 \leqslant 2 \textit{ et } \deg \phi_{d-1}^\nu \leqslant 1, \qquad 1 \leqslant \nu \leqslant d-1.$$

De plus, si: $\psi(x)=e_1x+e_0$, $\phi_{d-1}^0(x)=c_2x^2+c_1x+c_0$, $\phi_\alpha^{\alpha+1}(x)=k_\alpha x+l_\alpha$, $\alpha=0, ..., d-2$, *alors*:

$$c_2 \neq \frac{e_1}{m+1}, \qquad m \geqslant 0, \quad e_1 \neq 0, \tag{3.4}$$

$$k_\alpha \neq \frac{\alpha+1}{m+1}, \qquad m \geqslant 0 \textit{ pour chaque } 0 \leqslant \alpha \leqslant d-2. \tag{3.5}$$

Démonstration. Pour $d=1$, la démonstration est faite dans [7]. Et, dans un cadre plus général, dans [11, 12].

Supposons $d \geqslant 2$.

La démonstration de ce théorème se fait selon le plan suivant:

I. (a) $\Rightarrow$ (b):

(i) (a) $\Rightarrow$ (3.1)–(3.3);

(ii) (a) $\Rightarrow$ (3.4), (3.5).

II. (b) $\Rightarrow$ (a):

(i) (3.1)–(3.3) $\Rightarrow$ l'orthogonalité des dérivées;

(ii) (3.4), (3.5) $\Rightarrow$ la régularité.

(I.i): (a) ⇒ (3.1)–(3.3). D'après la Proposition 2.1, on a en particulier:

$$D\tilde{\mathscr{L}}_\nu = -(\nu+1)\,\mathscr{L}_{\nu+1}, \qquad \nu = 0, 1, ..., d-1.$$

D'où

$$\begin{pmatrix} D\tilde{\mathscr{L}}_0 \\ D\tilde{\mathscr{L}}_1 \\ \vdots \\ D\tilde{\mathscr{L}}_{d-1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathscr{L}_1 \\ \mathscr{L}_2 \\ \vdots \\ \mathscr{L}_d \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

D'autre part, la relation (2.5) permet d'exprimer $d\mathscr{L}_d$ en fonction de $\mathscr{L}_0, ..., \mathscr{L}_{d-1}$:

$$d\mathscr{L}_d = \psi\mathscr{L}_0 + \sum_{\mu=1}^{d-1} \zeta_\mu \mathscr{L}_\mu.$$

En effet, de (2.5), pour $n=1$ et $\nu=0$, on a: $\mathscr{L}_d = \sum_{\mu=0}^{d-1} \Lambda^\mu(1,0)\,\mathscr{L}_\mu$, où $\Lambda^0(1,0)$ est un polynôme de degré un, et $\Lambda^\mu(1,0)$, $1 \leqslant \mu \leqslant d-1$, sont des constantes. Donc $d\mathscr{L}_d = \sum_{\mu=0}^{d-1} d\,\Lambda^\mu(1,0)\,\mathscr{L}_\mu$. D'où $\psi(x) = d\,\Lambda^0(1,0)(x)$ (de degré 1), et $\zeta_\mu = d\,\Lambda^\mu(1,0)$, $1 \leqslant \mu \leqslant d-1$ (des constantes).

Si on pose $\Lambda^0(1,0)(x) = m_1 x + m_0$, $\Lambda^\mu(1,0) = s_\mu$, $1 \leqslant \mu \leqslant d-1$, alors, en appliquant successivement la forme linéaire $\mathscr{L}_d$ à $B_n(x)$, $n = 1, ..., d$, compte tenu des récurrences (R1) et (R2), on obtient facilement le système suivant:

$$\begin{cases} \beta_0 m_1 + m_0 = 0; \\ \gamma_1^{d-\mu} m_1 + s_\mu = 0, \qquad \mu = 1, ..., d-1; \\ \gamma_1^0 m_1 = 1. \end{cases}$$

D'où l'on a immédiatemment:

$$m_1 = 1/\gamma_1^0, \qquad m_0 = -\beta_0/\gamma_1^0 \qquad \text{et} \qquad s_\mu = -\gamma_1^{d-\mu}/\gamma_1^0, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant d-1.$$

Par conséquant, si $\psi(x) = e_1 x + e_0$, alors: $e_1 = dm_1 = d/\gamma_1^0 \neq 0$ et $e_0 = m_0 = -(d\beta_0/\gamma_1^0)$. Donc $\psi(x) = (d/\gamma_1^0)\,B_1(x)$ et $\zeta_\mu = -(d\gamma_1^{d-\mu}/\gamma_1^0)$, $\mu = 1, ..., d-1$.

Finalement, l'équation (3.6) s'écrit:

$$\begin{pmatrix} D\tilde{\mathscr{L}}_0 \\ D\tilde{\mathscr{L}}_1 \\ \vdots \\ D\tilde{\mathscr{L}}_{d-1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d-1 \\ \psi(x) & \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_{d-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathscr{L}_0 \\ \mathscr{L}_1 \\ \vdots \\ \mathscr{L}_{d-1} \end{pmatrix},$$

soit

$$D\tilde{A} = -\Psi A, \tag{3.7}$$

où Ψ est la matrice (3.2). Avec, pour tout $f \in \mathscr{P}$:

$$D\tilde{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} \langle D\tilde{\mathscr{L}}_0, f(x)\rangle \\ \vdots \\ \langle D\tilde{\mathscr{L}}_{d-1}, f(x)\rangle \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \langle \tilde{\mathscr{L}}_0, f'(x)\rangle \\ \vdots \\ \langle \tilde{\mathscr{L}}_{d-1}, f'(x)\rangle \end{pmatrix};$$

$$\Psi A(f(x)) = \begin{pmatrix} \langle \mathscr{L}_1, f(x)\rangle \\ 2\langle \mathscr{L}_2, f(x)\rangle \\ \vdots \\ (d-2)\langle \mathscr{L}_{d-2}, f(x)\rangle \\ \langle \psi(x)\, \mathscr{L}_0, f(x)\rangle + \sum_{\mu=1}^{d-1} \zeta_\mu \langle \mathscr{L}_\mu, f(x)\rangle \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, en dérivant la relation de récurrence (R1) vérifiée par $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ et en changeant $m \to m+1$ on a, pour tout $m \geqslant 0$:

$$B_{m+d+1}(x) = (m+d+2)\, Q_{m+d+1}(x) - (m+d+1)(x - \beta_{m+d+1})\, Q_{m+d}(x) + \sum_{\nu=0}^{d-1} (m+d-\nu)\, \gamma_{m+d+1-\nu}^{d-1-\nu} Q_{m+d-1-\nu}(x). \tag{3.8}$$

Ensuite, comme $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ est aussi d-orthogonale donc vérifie également une relation de récurrence d'ordre $d+1$ (du type (R1)):

$$Q_{m+d+1}(x) = (x - \tilde{\beta}_{m+d})\, Q_{m+d}(x) - \sum_{\nu=0}^{d-1} \tilde{\gamma}_{m+d-\nu}^{d-1-\nu} Q_{m+d-1-\nu}(x), \qquad m \geqslant 0.$$

Ce qui donne, en formant $B_{m+d+1}(x) + (m+d+1)\, Q_{m+d+1}(x)$, pour tout $m \geqslant 0$:

$$B_{m+d+1}(x) = Q_{m+d+1}(x) + (m+d+1)(\beta_{m+d+1} - \tilde{\beta}_{m+d})\, Q_{m+d}(x) + \sum_{\nu=0}^{d-1} [(m+d-\nu)\, \gamma_{m+d+1-\nu}^{d-1-\nu} - (m+d+1)\, \tilde{\gamma}_{m+d-\nu}^{d-1-\nu}]\, Q_{m+d-1-\nu}(x). \tag{3.9}$$

D'une manière analogue, en utilisant les conditions initiales (relations de récurrence (R2)) vérifiées par les suites $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ et $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ on obtient aussi:

$$\begin{cases} B_0(x)=Q_0(x)=1, \\ B_1(x)=Q_1(x)+(\beta_1-\tilde{\beta}_0)\,Q_0(x), \\ \text{et si } d\geqslant 2, \text{ on a pour tout } 2\leqslant n\leqslant d: \\ B_n(x)=Q_n(x)+n(\beta_n-\tilde{\beta}_{n-1})\,Q_{n-1}(x) \\ \qquad +\sum_{\mu=0}^{n-2}\left[(n-1-\mu)\,\gamma_{n-\mu}^{d-1-\mu}-n\tilde{\gamma}_{n-1-\mu}^{d-1-\mu}\right]Q_{n-2-\mu}(x). \end{cases} \tag{3.9)bis}$$

De (3.9), on obtient pour chaque $0\leqslant\alpha\leqslant d-1$:

$$\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, B_n(x)\rangle=0, \qquad n\geqslant d+2+\alpha,$$

$$\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, B_{d+1+\alpha}(x)\rangle=(\alpha+1)\,\gamma_{\alpha+2}^0-(\alpha+d+1)\,\tilde{\gamma}_{\alpha+1}^0.$$

Et de (3.9)bis, on a aussi pour chaque $0\leqslant\alpha\leqslant d-1$:

$$\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, B_n(x)\rangle=0, \qquad 0\leqslant n\leqslant\alpha-1,$$

$$\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, B_\alpha(x)\rangle=1.$$

Donc, il existe $\alpha\leqslant t_\alpha\leqslant d+1+\alpha$ tel que:

$$\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, B_n(x)\rangle=0, \qquad n\geqslant t_\alpha+1,$$

$$\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, B_{t_\alpha}(x)\rangle\neq 0.$$

Par conséquent, d'après le Théorème 2.2., il existe d polynômes ϕ_α^ν, $0\leqslant\nu\leqslant d-1$, tels que:

$$\tilde{\mathscr{L}}_\alpha=\sum_{\nu=0}^{d-1}\phi_\alpha^\nu\mathscr{L}_\nu \text{ avec, si } t_\alpha=q_\alpha d+r_\alpha,\ 0\leqslant r_\alpha\leqslant d-1: \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} &\deg\phi_\alpha^{r_\alpha}=q_\alpha, && 0\leqslant r_\alpha\leqslant d-1 \text{ et si } d\geqslant 2: \\ &\deg\phi_\alpha^\nu\leqslant q_\alpha, && 0\leqslant\nu\leqslant r_\alpha-1 \text{ si } 1\leqslant r_\alpha\leqslant d-1, \\ &\deg\phi_\alpha^\nu\leqslant q_\alpha-1, && r_\alpha+1\leqslant\nu\leqslant d-1 \text{ si } 0\leqslant r_\alpha\leqslant d-2. \end{aligned}$$

Puisque $\alpha\leqslant t_\alpha\leqslant d+1+\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant d-1$, on est amené alors à distinguer les différents cas suivants:

(i) $0 \leqslant \alpha \leqslant d-2$, d'où $\alpha \leqslant t_\alpha \leqslant \alpha + d + 1 < 2d$. Par conséquent: $0 \leqslant q_\alpha \leqslant 1$. Si $q_\alpha = 0$, on a $\alpha \leqslant r_\alpha$. Si $q_\alpha = 1$, on a $r_\alpha \leqslant \alpha + 1$.

(ii) $\alpha = d-1$, donc $d-1 \leqslant t_{d-1} \leqslant 2d$, d'où $0 \leqslant q_{d-1} \leqslant 2$. Si $q_{d-1} = 0$, on a $r_{d-1} = d-1$ et si $q_{d-1} = 2$, on a $r_{d-1} = 0$.

Donc $q_{d-1} = 2$ est réalisé seulement lorsque $t_{d-1} = 2d$, i.e. que seul le polynôme ϕ_{d-1}^0 est de degré $\leqslant 2$. La relation (3.10) s'écrit alors sous la forme matricielle suivante:

$$\tilde{\Lambda} = \Phi \Lambda, \tag{3.11}$$

où $\Lambda = {}^t(\mathscr{L}_0, ..., \mathscr{L}_{d-1})$, $\tilde{\Lambda} = {}^t(\tilde{\mathscr{L}}_0, ..., \tilde{\mathscr{L}}_{d-1})$ et Φ est la matrice (3.3).

$$\text{Avec } \tilde{\Lambda}(f(x)) = \begin{pmatrix} \langle \tilde{\mathscr{L}}_0, f(x) \rangle \\ \vdots \\ \langle \tilde{\mathscr{L}}_{d-1}, f(x) \rangle \end{pmatrix};$$

$$\Phi\Lambda(f(x)) = \begin{pmatrix} \sum_{\nu=0}^{d-1} \langle \phi_0^\nu(x) \mathscr{L}_\nu, f(x) \rangle \\ \vdots \\ \sum_{\nu=0}^{d-1} \langle \phi_{d-1}^\nu(x) \mathscr{L}_\nu, f(x) \rangle \end{pmatrix}, \qquad \forall f \in \mathscr{P}.$$

Des deux relations (3.7) et (3.11) on a facilement (3.1).

(I.ii): (a) $\Rightarrow$ (3.4), (3.5). Montrons maintenant que, si on écrit:

$$\psi(x) = e_1 x + e_0 \qquad \left(e_1 = \frac{d}{\gamma_1^0},\ e_0 = -\frac{d\beta_0}{\gamma_1^0}\right);$$

$$\phi_\alpha^{\alpha+1}(x) = k_\alpha x + l_\alpha \qquad \text{puisque} \quad \deg \phi_\alpha^{\alpha+1} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant d-2;$$

$$\phi_{d-1}^0(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0,$$

on a nécessairement les deux conditions (3.4) et (3.5).

En effet, de (3.8), on peut écrire pour tout $m \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}(m+d+1)\, xQ_{m+d}(x) &= (m+d+2)\, Q_{m+d+1}(x) \\ &\quad + (m+d+1)\, \beta_{m+d+1} Q_{m+d}(x) - B_{m+d+1}(x) \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{d-1} (m+d-\nu)\, \gamma_{m+d+1-\nu}^{d-1-\nu} Q_{m+d-1-\nu}(x).\end{aligned}$$

D'où, pour $m \to md+\alpha$, $m \geqslant 0$, $1 \leqslant \alpha \leqslant d-1$, on a:

$$\begin{aligned}
&((m+1)\,d+\alpha+1)\,xQ_{(m+1)\,d+\alpha}(x)\\
&\quad=((m+1)\,d+\alpha+2)\,Q_{(m+1)\,d+\alpha+1}(x)\\
&\qquad+((m+1)\,d+\alpha+1)\,\beta_{(m+1)\,d+\alpha+1}\,Q_{(m+1)\,d+\alpha}(x)\\
&\qquad-B_{(m+1)\,d+\alpha+1}(x)+\sum_{\nu=0}^{d-1}((m+1)\,d+\alpha-\nu)\\
&\qquad\times\gamma^{d-1-\nu}_{(m+1)\,d+\alpha+1-\nu}\,Q_{(m+1)\,d+\alpha-\nu-1}(x).
\end{aligned}$$

Par suite:

$$\begin{aligned}
&((m+1)\,d+\alpha+1)\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, x^{m+1}Q_{(m+1)\,d+\alpha}(x)\rangle\\
&\quad=((m+1)\,d+\alpha+2)\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, x^{m}Q_{(m+1)\,d+\alpha+1}(x)\rangle\\
&\qquad+((m+1)\,d+\alpha+1)\,\beta_{(m+1)\,d+\alpha+1}\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, x^{m}Q_{(m+1)\,d+\alpha}(x)\rangle\\
&\qquad-\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, B_{(m+1)\,d+\alpha+1}(x)\rangle\\
&\qquad+\sum_{\nu=0}^{d-1}((m+1)\,d+\alpha-\nu)\,\gamma^{d-1-\nu}_{(m+1)\,d+\alpha+1-\nu}\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, Q_{(m+1)\,d+\alpha-\nu-1}(x)\rangle.
\end{aligned}$$

Or par hypothèse, la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ est d-orthogonale par rapport à la fonctionnelle $\tilde{\Lambda}={}^t(\tilde{\mathscr{L}}_0, ..., \tilde{\mathscr{L}}_{d-1})$, donc:

$$\begin{aligned}
&((m+1)\,d+\alpha+1)\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, x^{m+1}Q_{(m+1)\,d+\alpha}(x)\rangle\\
&\quad=-\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, B_{(m+1)\,d+\alpha+1}(x)\rangle\\
&\qquad+(md+\alpha+1)\,\gamma^0_{md+\alpha+2}\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, x^mQ_{md+\alpha}(x)\rangle.
\end{aligned}$$

Mais: $\tilde{\mathscr{L}}_\alpha=\sum_{\nu=0}^{d-1}\phi^\nu_\alpha\mathscr{L}_\nu$, $0\leqslant\alpha\leqslant d-1$.

Donc

$$\begin{aligned}
&((m+1)\,d+\alpha+1)\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, x^{m+1}Q_{(m+1)\,d+\alpha}(x)\rangle\\
&\quad=-\sum_{\nu=0}^{d-1}\langle\mathscr{L}_\nu, \phi^\nu_\alpha(x)\,x^mB_{(m+1)\,d+\alpha+1}(x)\rangle\\
&\qquad+\gamma^0_{md+\alpha+2}\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, x^mB'_{md+\alpha+1}(x)\rangle\\
&\quad=-\sum_{\nu=0}^{d-1}\langle\mathscr{L}_\nu, \phi^\nu_\alpha(x)\,x^mB_{(m+1)\,d+\alpha+1}(x)\rangle\\
&\qquad+\gamma^0_{md+\alpha+2}\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, (x^mB_{md+\alpha+1}(x))'-mx^{m-1}B_{md+\alpha+1}(x)\rangle
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}((m+1)d+\alpha+1)\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, x^{m+1}Q_{(m+1)d+\alpha}(x)\rangle &= -m\gamma^0_{md+\alpha+2}\sum_{\nu=0}^{d-1}\langle\mathscr{L}_\nu, \phi^\nu_\alpha(x)\,x^{m-1}B_{md+\alpha+1}(x)\rangle\\ &\quad-\sum_{\nu=0}^{d-1}\langle\mathscr{L}_\nu, \phi^\nu_\alpha(x)\,x^m B_{(m+1)d+\alpha+1}(x)\rangle\\ &\quad-\gamma^0_{md+\alpha+2}\langle D\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, x^m B_{md+\alpha+1}(x)\rangle\end{aligned}$$

ou bien, d'après la relation (2.2) et pour chaque $0\leqslant\alpha\leqslant d-1$:

$$\begin{aligned}((m+1)d+\alpha+1)\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, x^{m+1}Q_{(m+1)d+\alpha}(x)\rangle &= -m\gamma^0_{md+\alpha+2}\sum_{\nu=0}^{d-1}\langle\mathscr{L}_\nu, \phi^\nu_\alpha(x)\,x^{m-1}B_{md+\alpha+1}(x)\rangle\\ &\quad-\sum_{\nu=0}^{d-1}\langle\mathscr{L}_\nu, \phi^\nu_\alpha(x)\,x^m B_{(m+1)d+\alpha+1}(x)\rangle\\ &\quad+(\alpha+1)\gamma^0_{md+\alpha+2}\langle\mathscr{L}_{\alpha+1}, x^m B_{md+\alpha+1}(x)\rangle,\end{aligned}$$

ou encore: pour $\alpha=0, 1, ..., d-2$:

$$\begin{aligned}((m+1)d+\alpha+1)\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, x^{m+1}Q_{(m+1)d+\alpha}(x)\rangle &= -\langle\mathscr{L}_{\alpha+1}, \phi^{\alpha+1}_\alpha(x)\,x^m B_{(m+1)d+\alpha+1}(x)\rangle\\ &\quad+(\alpha+1)\gamma^0_{md+\alpha+2}\langle\mathscr{L}_{\alpha+1}, x^m B_{md+\alpha+1}(x)\rangle\\ &\quad-m\gamma^0_{md+\alpha+2}\langle\mathscr{L}_{\alpha+1}, \phi^{\alpha+1}_\alpha(x)\,x^{m-1}B_{md+\alpha+1}(x)\rangle.\end{aligned}$$

Donc, si $\phi^{\alpha+1}_\alpha(x)=k_\alpha x+l_\alpha$, alors:

$$\begin{aligned}((m+1)d+\alpha+1)\langle\tilde{\mathscr{L}}_\alpha, x^{m+1}Q_{(m+1)d+\alpha}(x)\rangle &= -k_\alpha\langle\mathscr{L}_{\alpha+1}, x^{m+1}B_{(m+1)d+\alpha+1}(x)\rangle\\ &\quad-m\gamma^0_{md+\alpha+2}k_\alpha\langle\mathscr{L}_{\alpha+1}, x^m B_{md+\alpha+1}(x)\rangle\\ &\quad+(\alpha+1)\gamma^0_{md+\alpha+2}\langle\mathscr{L}_{\alpha+1}, x^m B_{md+\alpha+1}(x)\rangle.\end{aligned}$$

Mais:

$$\langle\mathscr{L}_{\alpha+1}, x^{m+1}B_{(m+1)d+\alpha+1}(x)\rangle=\gamma^0_{md+\alpha+2}\langle\mathscr{L}_{\alpha+1}, x^m B_{md+\alpha+1}(x)\rangle.$$

Donc, pour tout $m \geq 0$:

$$((m+1)\,d+\alpha+1)\langle \tilde{\mathscr{L}}_\alpha, x^{m+1}Q_{(m+1)d+\alpha}(x)\rangle$$
$$=(\alpha+1-(m+1)\,k_\alpha)\langle \mathscr{L}_{\alpha+1}, x^{m+1}B_{(m+1)d+\alpha+1}(x)\rangle \neq 0.$$

ce qui implique que: $k_\alpha \neq (\alpha+1)/(m+1)$ (condition (3.5)).

Et, pour $\alpha = d-1$:

$$((m+1)\,d+d)\langle \tilde{\mathscr{L}}_{d-1}, x^{m+1}Q_{(m+1)d+d-1}(x)\rangle$$
$$= -\langle \mathscr{L}_0, \phi^0_{d-1}(x)\,x^m B_{(m+1)d+d}(x)\rangle$$
$$- m\gamma^0_{md+d+1}\langle \mathscr{L}_0, \phi^0_{d-1}(x)\,x^{m-1}B_{md+d}(x)\rangle$$
$$+ d\gamma^0_{md+d+1}\langle \mathscr{L}_d, x^m B_{md+d}(x)\rangle.$$

Mais: $d\mathscr{L}_d = \psi\mathscr{L}_0 + \sum_{\mu=1}^{d-1}\zeta_\mu \mathscr{L}_\mu$ avec $\deg \psi = 1$, donc:

$$(m+2)\,d\langle \tilde{\mathscr{L}}_{d-1}, x^{m+1}Q_{(m+1)d+d-1}(x)\rangle$$
$$= -\langle \mathscr{L}_0, \phi^0_{d-1}(x)\,x^m B_{(m+2)d}(x)\rangle$$
$$- m\gamma^0_{(m+1)d+1}\langle \mathscr{L}_0, \phi^0_{d-1}(x)\,x^{m-1}B_{(m+1)d}(x)\rangle$$
$$+ \gamma^0_{(m+1)d+1}\langle \mathscr{L}_0, \psi(x)\,x^m B_{(m+1)d}(x)\rangle.$$

Si $\phi^0_{d-1}(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$, $\psi(x) = e_1x + e_0$, alors:

$$(m+2)\,d\langle \tilde{\mathscr{L}}_{d-1}, x^{m+1}Q_{(m+1)d+d-1}(x)\rangle$$
$$= c_2\langle \mathscr{L}_0, x^{m+2}B_{(m+2)d}(x)\rangle$$
$$- m\gamma^0_{(m+1)d+1}c_2\langle \mathscr{L}_0, x^{m+1}B_{(m+1)d}(x)\rangle$$
$$+ e_1\gamma^0_{(m+1)d+1}\langle \mathscr{L}_0, x^{m+1}B_{(m+1)d}(x)\rangle.$$

Or $\langle \mathscr{L}_0, x^{m+1}B_{(m+1)d}(x)\rangle = \gamma^0_{md+1}\langle \mathscr{L}_0, x^m B_{md}(x)\rangle$. D'où:

$$(m+2)\,d\langle \tilde{\mathscr{L}}_{d-1}, x^{m+1}Q_{(m+1)d+d-1}(x)\rangle$$
$$= \{e_1 - (1+m)\,c_2\}\langle \mathscr{L}_0, x^{m+2}B_{(m+2)d}(x)\rangle \neq 0, \quad m \geq 0.$$

C'est la condition (3.4).

(II.i): (3.1)–(3.3) $\Rightarrow$ l'orthogonalité des dérivées. Il suffit de montrer que la suite des dérivées, $\{Q_n\}_{n\geq 0}$, est aussi d-orthogonale par rapport à la fonctionnelle $\Phi\Lambda$.

En effet, par hypothèse la fonctionnelle vectorielle Λ vérifie l'équation (3.1): $\Psi\Lambda + D(\Phi\Lambda) = 0$. On pose $\tilde{\Gamma} = \Phi\Lambda$ avec $\tilde{\Gamma} = {}^t(\tilde{\Gamma}^1, ..., \tilde{\Gamma}^d)$. Donc $\tilde{\Gamma}^\alpha = \sum_{\nu=0}^{d-1}\phi^\nu_{\alpha-1}\mathscr{L}_\nu$, $\alpha = 1, ..., d$, où ϕ^ν_μ, $0 \leq \nu \leq d-1$, $0 \leq \mu \leq d-1$, sont les polynômes de la matrice Φ.

En terme d'application de fonctionnelles linéaires scalaires, l'équation (3.1) se traduit par:

$$\Psi A(p(x)) + D(\Phi A)(p(x)) = 0, \qquad \forall p \in P, \tag{3.1)bis}$$

avec
$$\Psi A(p(x)) = \begin{pmatrix} \langle \mathscr{L}_1, p(x) \rangle \\ 2\langle \mathscr{L}_2, p(x) \rangle \\ \vdots \\ (d-1)\langle \mathscr{L}_{d-1}, p(x) \rangle \\ \langle \psi(x)\, \mathscr{L}_0, p(x) \rangle + \sum_{\mu=1}^{d-1} \zeta_\mu \langle \mathscr{L}_\mu, p(x) \rangle \end{pmatrix};$$

$$D(\Phi A)(p(x)) = \begin{pmatrix} \langle D\tilde{\Gamma}^1, p(x) \rangle \\ \langle D\tilde{\Gamma}^2, p(x) \rangle \\ \vdots \\ \langle D\tilde{\Gamma}^d, p(x) \rangle \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \langle \tilde{\Gamma}^1, p'(x) \rangle \\ \langle \tilde{\Gamma}^2, p'(x) \rangle \\ \vdots \\ \langle \tilde{\Gamma}^d, p'(x) \rangle \end{pmatrix} = -\Phi A(p'(x)).$$

D'où, pour tout $p \in \mathscr{P}$, on peut écrire, compte tenu de l'équation (3.1)bis:

$$\begin{cases} \langle \tilde{\Gamma}^\alpha, p'(x) \rangle = \alpha \langle \mathscr{L}_\alpha, p(x) \rangle, & \alpha = 1, ..., d-1, \\ \langle \tilde{\Gamma}^d, p'(x) \rangle = \langle \mathscr{L}_0, \psi(x)\, p(x) \rangle + \sum_{\mu=1}^{d-1} \zeta_\mu \langle \mathscr{L}_\mu, p(x) \rangle. \end{cases} \tag{3.12}$$

Montrons donc que la suite $\{Q_n\}_{n \geqslant 0}$, $Q_n(x) = (1/n+1)\, DB_{n+1}(x)$, est d-orthogonale par rapport à $\tilde{\Gamma}$, c'est-à-dire pour tout $1 \leqslant \alpha \leqslant d$:

$$\begin{cases} \langle \tilde{\Gamma}^\alpha, x^m Q_n(x) \rangle = 0, & n \geqslant md + \alpha, \quad m \geqslant 0, \\ \langle \tilde{\Gamma}^\alpha, x^m Q_{md+\alpha-1}(x) \rangle \neq 0, & m \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Dans (3.12) et pour $p(x) = x^m B_{n+1}(x)$, $n, m \geqslant 0$, on obtient après développement: pour $\alpha = 1, ..., d-1$:

$$(n+1)\langle \tilde{\Gamma}^\alpha, x^m Q_n(x) \rangle = \alpha \langle \mathscr{L}_\alpha, x^m B_{n+1}(x) \rangle - m \langle \tilde{\Gamma}^\alpha, x^{m-1} B_{n+1}(x) \rangle \tag{3.14}$$

et pour $\alpha = d$:

$$\begin{aligned} &(n+1)\langle \tilde{\Gamma}^d, x^m Q_n(x) \rangle \\ &\quad = \langle \mathscr{L}_0, x^m \psi(x)\, B_{n+1}(x) \rangle - m \langle \tilde{\Gamma}^d, x^{m-1} B_{n+1}(x) \rangle \\ &\quad\quad + \sum_{\mu=1}^{d-1} \zeta_\mu \langle \mathscr{L}_\mu, x^m B_{n+1}(x) \rangle. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ensuite, de (3.14), on a:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\Gamma}^{\alpha}, x^{m-1}B_{n+1}(x)\rangle &= \sum_{\nu=0}^{d-1} \langle \mathscr{L}_{\nu}, \phi_{\alpha-1}^{\nu}(x)\, x^{m-1}B_{n+1}(x)\rangle \\ &= \sum_{\nu=0}^{\alpha} \langle \mathscr{L}_{\nu}, \phi_{\alpha-1}^{\nu}(x)\, x^{m-1}B_{n+1}(x)\rangle \\ &\quad + \sum_{\nu=\alpha+1}^{d-1} \langle \mathscr{L}_{\nu}, \phi_{\alpha-1}^{\nu}(x)\, x^{m-1}B_{n+1}(x)\rangle.\end{aligned}$$

Par hypothèse: $\deg \phi_{\alpha-1}^{\nu} \leqslant 1$ si $0 \leqslant \nu \leqslant \alpha$ et donc:

$$\langle \mathscr{L}_{\nu}, \phi_{\alpha-1}^{\nu}(x)\, x^{m-1}B_{n+1}(x)\rangle = 0 \qquad \text{si} \quad n+1 \geqslant md+\nu+1, \quad m \geqslant 1,$$

a fortiori si $n \geqslant md+\alpha$ et si $\alpha \leqslant d-2$.

Les polynômes $\phi_{\alpha-1}^{\nu}$ sont des constantes pour $\alpha+1 \leqslant \nu \leqslant d-1$ et donc:

$$\langle \mathscr{L}_{\nu}, \phi_{\alpha-1}^{\nu}(x)\, x^{m-1}B_{n+1}(x)\rangle = 0 \qquad \text{si} \quad n+1 \geqslant (m-1)\, d+\nu+1, \quad m \geqslant 1,$$

a fortiori si $n \geqslant md-1$, $m \geqslant 1$. Donc $\langle \tilde{\Gamma}^{\alpha}, x^{m-1}B_{n+1}(x)\rangle = 0$, $n \geqslant md+\alpha$, $m \geqslant 1$, $1 \leqslant \alpha \leqslant d-1$, puisque, par hypothèse: $\langle \mathscr{L}_{\alpha}, x^{m}B_{n+1}(x)\rangle = 0$, $n \geqslant md+\alpha$, $m \geqslant 0$. On a bien: $\langle \tilde{\Gamma}^{\alpha}, x^{m}Q_{n}(x)\rangle = 0$, $n \geqslant md+\alpha$, $m \geqslant 0$, $1 \leqslant \alpha \leqslant d-1$.

Ensuite, montrons que: $\langle \tilde{\Gamma}^{d}, x^{m}Q_{n}(x)\rangle = 0$, $n \geqslant md+d$, $m \geqslant 0$. D'après l'hypothèse: $\langle \mathscr{L}_{0}, \psi(x)\, x^{m}B_{n+1}(x)\rangle = 0$, $n \geqslant md+d$, $m \geqslant 0$. Et pour chaque $1 \leqslant \mu \leqslant d-1$: $\langle \mathscr{L}_{\mu}, x^{m}B_{n+1}(x)\rangle = 0$, si $n+1 \geqslant md+\mu+1$, $m \geqslant 0$, a fortiori pour $n \geqslant md+d$, $m \geqslant 0$.

Enfin, on a:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\Gamma}^{d}, x^{m-1}B_{n+1}(x)\rangle &= \sum_{\nu=0}^{d-1} \langle \mathscr{L}_{\nu}, \phi_{d-1}^{\nu}(x)\, x^{m-1}B_{n+1}(x)\rangle \\ &= \langle \mathscr{L}_{0}, \phi_{d-1}^{0}(x)\, x^{m-1}B_{n+1}(x)\rangle \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{d-1} \langle \mathscr{L}_{\nu}, \phi_{d-1}^{\nu}(x)\, x^{m-1}B_{n+1}(x)\rangle,\end{aligned}$$

où $\deg \phi_{d-1}^{0} \leqslant 2$ et $\deg \phi_{d-1}^{\nu} \leqslant 1$, $1 \leqslant \nu \leqslant d-1$ selon l'hypothèse. Il en résulte: $\langle \tilde{\Gamma}^{d}, x^{m-1}B_{n+1}(x)\rangle = 0$, $n \geqslant md+d$, $m \geqslant 1$.

(II.ii): (3.4), (3.5) $\Rightarrow$ la régularité. Montrons maintenant que: $\langle \tilde{\Gamma}^{\alpha}, x^{m}Q_{md+\alpha-1}(x)\rangle \neq 0$, $m \geqslant 0$, $\alpha = 1, ..., d$. Dans (3.12) en posant $p(x) = x^{m}B_{md+\alpha}(x)$, $m \geqslant 0$, on obtient après développement: pour $\alpha = 1, ..., d-1$:

$$\begin{aligned}(md+\alpha)\langle \tilde{\Gamma}^{\alpha}, x^m Q_{md+\alpha-1}(x)\rangle &= \alpha\langle \mathscr{L}_\alpha, x^m B_{md+\alpha}(x)\rangle - m\langle \tilde{\Gamma}^{\alpha}, x^{m-1} B_{md+\alpha}(x)\rangle \\ &= \alpha\langle \mathscr{L}_\alpha, x^m B_{md+\alpha}(x)\rangle - m\sum_{\mu=0}^{d-1}\langle \mathscr{L}_\mu, x^{m-1}\phi^{\mu}_{\alpha-1}(x)\, B_{md+\alpha}(x)\rangle \end{aligned}\tag{3.16}$$

et pour $\alpha = d$:

$$\begin{aligned}(md+d)\langle \tilde{\Gamma}^{d}, x^m Q_{md+d-1}(x)\rangle &= \langle \mathscr{L}_0, x^m\psi(x)\, B_{md+d}(x)\rangle + \sum_{\mu=1}^{d-1}\zeta_\mu\langle \mathscr{L}_\mu, x^m B_{md+d}(x)\rangle \\ &\quad - m\langle \tilde{\Gamma}^{d}, x^{m-1} B_{md+d}(x)\rangle. \end{aligned}\tag{3.17}$$

On écrit (3.16) sous la forme:

$$\begin{aligned}(md+\alpha)\langle \tilde{\Gamma}^{\alpha}, x^m Q_{md+\alpha-1}(x)\rangle &= -m\sum_{\mu=0}^{\alpha-1}\langle \mathscr{L}_\mu, x^{m-1}\phi^{\mu}_{\alpha-1}(x)\, B_{md+\alpha}(x)\rangle \\ &\quad + \langle \mathscr{L}_\alpha, (\alpha x - m\phi^{\alpha}_{\alpha-1}(x))\, x^{m-1} B_{md+\alpha}(x)\rangle \\ &\quad - m\sum_{\mu=\alpha+1}^{d-1}\langle \mathscr{L}_\mu, x^{m-1}\phi^{\mu}_{\alpha-1}(x)\, B_{md+\alpha}(x)\rangle, \end{aligned}$$

soit $(md+\alpha) < \tilde{\Gamma}^{\alpha}, x^m Q_{md+\alpha-1}(x)\rangle = \langle \mathscr{L}_\alpha, (\alpha x - m\phi^{\alpha}_{\alpha-1}(x))\, x^{m-1} B_{md+\alpha}(x)\rangle$, puisque $\deg \phi^{\mu}_{\alpha-1} \leqslant 1$, $0 \leqslant \mu \leqslant \alpha$ et $\deg \phi^{\mu}_{\alpha-1} = 0$, $\alpha+1 \leqslant \mu \leqslant d-1$. Ecrivant $\phi^{\alpha}_{\alpha-1}(x) = k_{\alpha-1}x + l_{\alpha-1}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant d-1$, on a:

$$\begin{aligned}(md+\alpha)\langle \tilde{\Gamma}^{\alpha}, x^m Q_{md+\alpha-1}(x)\rangle &= (\alpha - mk_{\alpha-1})\langle \mathscr{L}_\alpha, x^m B_{md+\alpha}(x)\rangle, \qquad m \geqslant 0.\end{aligned}$$

Donc $(md+\alpha)\langle \tilde{\Gamma}^{\alpha}, x^m Q_{md+\alpha-1}(x)\rangle \neq 0$. Car, d'après (3.5) $k_{\alpha-1} \neq \alpha/m$, $m \geqslant 1$, $1 \leqslant \alpha \leqslant d-1$ et par hypothèse: $\langle \mathscr{L}_\alpha, x^m B_{md+\alpha}(x)\rangle \neq 0$, $m \geqslant 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant d-1$.

Enfin, de (3.17), on a:

$$\begin{aligned}(m+1)\, d\langle \tilde{\Gamma}^{d}, x^m Q_{md+d-1}(x)\rangle &= \langle \mathscr{L}_0, x^m\psi(x)\, B_{(m+1)d}(x)\rangle + \sum_{\mu=1}^{d-1}\zeta_\mu\langle \mathscr{L}_\mu, x^m B_{(m+1)d}(x)\rangle \\ &\quad - m\sum_{\nu=0}^{d-1}\langle \mathscr{L}_\nu, x^{m-1}\phi^{\nu}_{d-1}(x)\, B_{(m+1)d}(x)\rangle \\ &= \langle \mathscr{L}_0, x^m\psi(x)\, B_{(m+1)d}(x)\rangle - m\langle \mathscr{L}_0, x^{m-1}\phi^{0}_{d-1}(x)\, B_{(m+1)d}(x)\rangle, \end{aligned}$$

car $\deg \phi^0_{d-1} \leqslant 2$ et $\deg \phi^\nu_{d-1} \leqslant 1$, $1 \leqslant \nu \leqslant d-1$. Donc, en écrivant $\psi(x) = e_1 x + e_0$, $\phi^0_{d-1}(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$, on obtient:

$$(m+1)\, d\langle \tilde{\Gamma}^d, x^m Q_{md+d-1}(x)\rangle = \langle \mathscr{L}_0, (e_1 - mc_2)\, x^{m+1} B_{(m+1)d}(x)\rangle$$
$$= (e_1 - mc_2)\langle \mathscr{L}_0, x^{m+1} B_{(m+1)d}(x)\rangle \neq 0,$$

puisque par hypothèse $\langle \mathscr{L}_0, x^{m+1} B_{(m+1)d}(x)\rangle \neq 0$ et, d'après la condition (3.4), $c_2 \neq e_1/m \Leftrightarrow e_1 - mc_2 \neq 0$, $m \geqslant 1$.

La suite $\{Q_n\}_{n \geqslant 0}$ vérifie alors (3.13), elle est donc d-orthogonale par rapport à la fonctionnelle $\tilde{\Gamma} = \Phi \Lambda$. Et, d'après la Remarque 2.1, elle l'est aussi par rapport à $\tilde{\Lambda} = {}^t(\tilde{\mathscr{L}}_0, ..., \tilde{\mathscr{L}}_{d-1})$.

La suite $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ est donc d-orthogonale "classique." D'où le résultat.

COROLLAIRE 3.1. *Les récurrences sur les moments des fonctionnelles linéaires scalaires $\mathscr{L}_0, ..., \mathscr{L}_{d-1}$ sont données par le système suivant*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_0^{0'} & \dfrac{1}{m+1} - k_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\phi_{d-2}^{0'} & -\phi_{d-2}^{1'} & \cdots & \dfrac{d-1}{m+1} - k_{d-2} & 0 \\ \dfrac{e_0}{m+1} - \phi_{d-1}^{0'}(0) & \dfrac{\zeta_1}{m+1} - \phi_{d-1}^{1'} & \cdots & \dfrac{\zeta_{d-1}}{m+1} - \phi_{d-1}^{d-1'} & \dfrac{e_1}{m+1} - c_2 \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} (\mathscr{L}_0)_{m+1} \\ (\mathscr{L}_1)_{m+1} \\ \vdots \\ (\mathscr{L}_{d-1})_{m+1} \\ (\mathscr{L}_0)_{m+2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \phi_0^0(0) & \cdots & \phi_0^{d-1}(0) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \phi_{d-2}^0(0) & \cdots & \phi_{d-2}^{d-1}(0) & 0 \\ \phi_{d-1}^0(0) & \cdots & \phi_{d-1}^{d-1}(0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathscr{L}_0)_m \\ (\mathscr{L}_1)_m \\ \vdots \\ (\mathscr{L}_{d-1})_m \\ (\mathscr{L}_0)_{m+1} \end{pmatrix},$$

où $(\mathscr{L}_\nu)_m = \langle \mathscr{L}_\nu, x^m\rangle$, $m \geqslant 0$, est le moment d'ordre m de la fonctionnelle $\mathscr{L}_\nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant d-1$.

Démonstration. A partir de la relation (3.12), on a:

$$\begin{cases} (\alpha+1)\langle \mathscr{L}_{\alpha+1}, p\rangle - \sum_{\nu=0}^{d-1} \langle \mathscr{L}_\nu, \phi_\alpha^\nu p'\rangle = 0, & \alpha = 0, ..., d-2, \\ \langle \mathscr{L}_0, \psi p\rangle + \sum_{\nu=1}^{d-1} \zeta_\nu \langle \mathscr{L}_\nu, p\rangle - \sum_{\nu=0}^{d-1} \langle \mathscr{L}_\nu, \phi_{d-1}^\nu p'\rangle = 0. \\ \forall p \in \mathscr{P}. \end{cases}$$

En particulier pour $p(x) = x^{m+1}$ on a les récurrences pour les moments des fonctionnelles linéaires $\mathscr{L}_0, ..., \mathscr{L}_{d-1}$:

(i) pour $\alpha = 0, 1, ..., d-2$:

$$(\alpha+1-(m+1)k_\alpha)\langle \mathscr{L}_{\alpha+1}, x^{m+1}\rangle - (m+1)\sum_{\nu=0}^{\alpha} \phi_\alpha^{\nu'}\langle \mathscr{L}_\nu, x^{m+1}\rangle$$
$$-(m+1)\sum_{\nu=0}^{d-1} \phi_\alpha^\nu(0)\langle \mathscr{L}_\nu, x^m\rangle = 0,$$

(ii) et pour $\alpha = d-1$:

$$(e_1-(m+1)c_2)\langle \mathscr{L}_0, x^{m+2}\rangle + e_0\langle \mathscr{L}_0, x^{m+1}\rangle + \sum_{\nu=1}^{d-1} \zeta_\nu\langle \mathscr{L}_\nu, x^{m+1}\rangle$$
$$-(m+1)\sum_{\nu=0}^{d-1} \phi_{d-1}^{\nu'}(0)\langle \mathscr{L}_\nu, x^{m+1}\rangle$$
$$-(m+1)\sum_{\nu=0}^{d-1} \phi_{d-1}^{\nu}(0)\langle \mathscr{L}_\nu, x^{m}\rangle = 0.$$

D'où le système suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_0^{0'} & \dfrac{1}{m+1} - k_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\phi_{d-2}^{0'} & -\phi_{d-2}^{1'} & \cdots & \dfrac{d-1}{m+1} - k_{d-2} & 0 \\ \dfrac{e_0}{m+1} - \phi_{d-1}^{0'}(0) & \dfrac{\zeta_1}{m+1} - \phi_{d-1}^{1'} & \cdots & \dfrac{\zeta_{d-1}}{m+1} - \phi_{d-1}^{d-1'} & \dfrac{e_1}{m+1} - c_2 \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} \langle \mathscr{L}_0, x^{m+1}\rangle \\ \langle \mathscr{L}_1, x^{m+1}\rangle \\ \vdots \\ \langle \mathscr{L}_{d-1}, x^{m+1}\rangle \\ \langle \mathscr{L}_0, x^{m+2}\rangle \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \phi_0^0(0) & \cdots & \phi_0^{d-1}(0) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \phi_{d-2}^0(0) & \cdots & \phi_{d-2}^{d-1}(0) & 0 \\ \phi_{d-1}^0(0) & \cdots & \phi_{d-1}^{d-1}(0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \mathscr{L}_0, x^m \rangle \\ \langle \mathscr{L}_1, x^m \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathscr{L}_{d-1}, x^m \rangle \\ \langle \mathscr{L}_0, x^{m+1} \rangle \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne le résultat.

4. Exemples

Nous donnons dans ce dernier paragraphe quelques exemples de suites d-orthogonales ($d \geqslant 2$), ainsi que leur équation fonctionnelle vectorielle.

Rappelons d'abord les résultats suivants:

4.1. *Les polynômes d-symétriques*

DÉFINITION 4.1. Considérons une suite de polynômes normalisés $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$. On dit que cette suite est d-symétrique lorsqu'elle vérifie:

$$B_n(\xi_k x) = \xi_k^n B_n(x), \qquad n \geqslant 0,$$

$$\text{où } \xi_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{d+1}\right), \qquad k = 1, ..., d, \quad \xi_k^{d+1} = 1.$$

Lorsque $d = 1$, donc $\xi_1 = -1$, on retrouve le cas d'une suite symétrique: $B_n(-x) = (-1)^n B_n(x)$, $n \geqslant 0$.

DÉFINITION 4.2. On dit que la fonctionnelle $\Lambda = {}^t(\mathscr{L}_0, ..., \mathscr{L}_{d-1})$ est d-symétrique lorsqu'elle vérifie:

$$(\mathscr{L}_\nu)_{(d+1)n+\mu} = 0, \qquad \nu = 0, 1, ..., d-1, \quad \mu = 0, 1, ..., d, \quad \nu \neq \mu, \quad n \geqslant 0.$$

En particulier si $d = 1$, Λ se réduit à la fonctionnelle linéaire scalaire $\mathscr{L}_0$, on retrouve la définition d'une fonctionnelle symétrique:

$$(\mathscr{L}_0)_{2n+1} = 0, \qquad n \geqslant 0 \text{ (tous les moments d'ordre impair sont nuls).}$$

THÉORÈME 4.1 [5, 6]. *Pour chaque suite normalisée $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ d-orthogonale par rapport à la fonctionnelle $\Lambda = {}^t(\mathscr{L}_0, \mathscr{L}_1, ..., \mathscr{L}_{d-1})$, les trois propositions suivantes sont équivalentes:*

(a) *La fonctionnelle Λ est d-symétrique.*

(b) *La suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ est d-symétrique.*

(c) *La suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ vérifie la récurrence suivante:*

$$\begin{cases} B_n(x)=x^n, & 0\leqslant n\leqslant d,\\ B_{n+d+1}(x)=xB_{n+d}(x)-\gamma^0_{n+1}B_n(x), & n\geqslant 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Si, en plus, la suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ est d-orthogonale "classique," alors sa suite des dérivées $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ vérifie également la récurrence:

$$\begin{cases} Q_n(x)=x^n, & 0\leqslant n\leqslant d,\\ Q_{n+d+1}(x)=xQ_{n+d}(x)-\tilde{\gamma}^0_{n+1}Q_n(x), & n\geqslant 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

4.2.

Exemple 1. Les polynômes d-orthogonaux de type Hermite. Soit $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite d-symétrique et d-orthogonale "classique." Donc, elle vérifie la récurrence (4.1) et sa suite des dérivées vérifie la récurrence (4.2). Ainsi, les égalités (3.9) et (3.9)bis deviennent:

$$\begin{cases} B_n(x)=Q_n(x)=x^n, \quad 0\leqslant n\leqslant d,\\ B_{m+d+1}(x)=Q_{m+d+1}(x)+[(m+1)\gamma^0_{m+2}\\ \qquad -(m+d+1)\tilde{\gamma}^0_{m+1}]\,Q_m(x), \qquad m\geqslant 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

En remplaçant maintenant (4.3) dans (4.1), compte tenu de (4.2), on obtient le système suivant:

$$(n+d+2)\,\tilde{\gamma}^0_{n+1}=(n+d)\,\tilde{\gamma}^0_n+(n+1)\,\gamma^0_{n+2}-(n-1)\,\gamma^0_{n+1}, \qquad n\geqslant 1, \tag{4.4}$$

$$(d+2)\,\tilde{\gamma}^0_1=\gamma^0_2+\gamma^0_1,$$

$$(n+2d)\,\tilde{\gamma}^0_{n+d}\tilde{\gamma}^0_n=2(n+d)\,\gamma^0_{n+d+1}\tilde{\gamma}^0_n-n\gamma^0_{n+d+1}\gamma^0_{n+1}, \qquad n\geqslant 1. \tag{4.5}$$

Pour résoudre ce système, on pose:

$$\tilde{\gamma}^0_{n+1}=\gamma^0_n\frac{n}{n+d}\theta_n, \qquad n\geqslant 1, \quad \theta_n\neq 0.$$

L'équation (4.5) se transforme alors en une équation de Riccati de la forme:

$$\theta_{n+d}+\frac{1}{\theta_n}=2, \qquad n\geqslant 1. \tag{4.6}$$

Nous ne considérons ici que le cas de la solution évidente de l'équation (4.6) c'est-à-dire $\theta_n = 1$, $n \geqslant 1$. D'où en remplaçant dans l'équation (4.4), on obtient:

$$\gamma_{n+1}^0 = \tilde{\gamma}_{n+1}^0 = \gamma_1^0 \frac{(n+d)!}{n!\, d!}, \qquad n \geqslant 0.$$

Il en résulte que $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ est une suite d'Appell, car $B_n(x) = Q_n(x)$, $n \geqslant 0$.

Les deux fonctionnelles A et $\tilde{A}$ sont alors identiques. L'équation fonctionnelle caractérisant cette suite est:

$$\Psi A + D(\Phi A) = 0.$$

Avec $$\Psi(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d-1 \\ \frac{d}{\gamma_1^0} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarques 4.1. Puisque $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ est une suite d'Appell:

(1) D'abord, en dérivant successivement $B_n(x)$ et en tenant compte de l'égalité $B_n(x) = Q_n(x)$, $n \geqslant 0$, on trouve

$$B_{n-\nu}(x) = \frac{(n-\nu)!}{(n+1)!} D^{\nu+1} B_{n+1}(x), \qquad 0 \leqslant \nu \leqslant n.$$

Ensuite, en substituant dans la relation de récurrence (4.1) vérifiée par $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$, on obtient l'équation différentielle d'ordre $d+1$ vérifiée par chaque polynôme $B_n(x)$:

$$\frac{\gamma_1^0}{d!} D^{d+1} B_n(x) - x B_n'(x) + n B_n(x) = 0, \qquad n \geqslant 0.$$

(2) Par ailleurs, en vertu de l'égalité (2.2), on a facilement:

$$\mathscr{L}_n = \frac{(-1)^n}{n!} D^n \mathscr{L}_0, \qquad n \geqslant 0.$$

D'où l'équation différentielle d'ordre d suivante vérifiée par $\mathscr{L}_0$ (dans $\mathscr{P}'$):

$$\gamma_1^0 \frac{(-1)^d}{d!} D^d \mathscr{L}_0 - x \mathscr{L}_0 = 0.$$

(3) Cette suite d-orthogonale "classique" est l'analogue des polynômes d'Hermite. D'où l'appellation: polynômes d-orthogonaux de type Hermite.

(4) Lorsque $d=1$, $\gamma_1^0=\frac{1}{2}$, on retrouve les polynômes orthogonaux classiques d'Hermite.

(5) Lorsque $d=2$, on retrouve les polynômes 2-orthogonaux de type Hermite [5, 6].

Pour cet exemple, les moments des fonctionnelles $\mathscr{L}_0, ..., \mathscr{L}_{d-1}$ sont donnés par: pour $\mathscr{L}_0$:

$$\begin{cases} (\mathscr{L}_0)_0 = 1, \\ (\mathscr{L}_0)_{(d+1)m} = \dfrac{(\gamma_1^0)^m}{(d!)^m} \displaystyle\prod_{n=0}^{m-1} \prod_{\nu=0}^{d} ((d+1)n+\nu), \qquad m \geqslant 1, \\ (\mathscr{L}_0)_{(d+1)m+\mu} = 0, \qquad \mu = 1, ..., d; \quad m \geqslant 0. \end{cases}$$

et pour tout $\mathscr{L}_\alpha$, $\alpha = 1, ..., d-1$:

$$(\mathscr{L}_\alpha)_{(d+1)m+\mu} = \delta_{\alpha,\mu} \binom{(d+1)m+2\alpha}{\alpha} (\mathscr{L}_0)_{(d+1)m},$$

$$\mu = 0, 1, ..., d; \quad m \geqslant 0.$$

En effet, d'après le Corollaire 3.1, les récurrences sur les moments des fonctionnelles linéaires $\mathscr{L}_0, ..., \mathscr{L}_{d-1}$ sont données par le système suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{d-1}{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{d}{\gamma_1^0(m+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathscr{L}_0)_{m+1} \\ (\mathscr{L}_1)_{m+1} \\ \vdots \\ (\mathscr{L}_{d-1})_{m+1} \\ (\mathscr{L}_0)_{m+2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathscr{L}_0)_m \\ (\mathscr{L}_1)_m \\ \vdots \\ (\mathscr{L}_{d-1})_m \\ (\mathscr{L}_0)_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Soit:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m+1}(\mathscr{L}_1)_{m+1} = (\mathscr{L}_0)_m \\ \dfrac{2}{m+1}(\mathscr{L}_2)_{m+1} = (\mathscr{L}_1)_m \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{d-1}{m+1}(\mathscr{L}_{d-1})_{m+1} = (\mathscr{L}_{d-2})_m \\ \dfrac{d}{\gamma_1^0(m+1)}(\mathscr{L}_0)_{m+2} = (\mathscr{L}_{d-1})_m. \end{cases}$$

D'où l'on obtient par récurrence:

$$(\mathscr{L}_0)_{m+d+1} = \gamma_1^0 \frac{(m+d)!}{d!\,m!}(\mathscr{L}_0)_m = \gamma_1^0 \binom{m+d}{d}(\mathscr{L}_0)_m, \qquad m \geqslant 0.$$

Par conséquent, en changeant $m \to (d+1)\,m+\mu$, on a les moments de la fonctionnelle $\mathscr{L}_0$. Car, en vertu de la récurrence vérifiée par la suite d-symétrique $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$, on a: $B_m(x) = x^m$ pour $m = 0, 1, ..., d$, donc:

$$(\mathscr{L}_0)_m = \langle \mathscr{L}_0, x^m \rangle = \delta_{0,m}, \qquad m = 0, 1, ..., d.$$

Par ailleurs, à partir de la relation $\mathscr{L}_n = ((-1)^n/n!)\,D^n\mathscr{L}_0$, $n \geqslant 0$, on obtient les moments des autres fonctionnelles $\mathscr{L}_\alpha$, $\alpha = 1, ..., d-1$, en fonction de ceux de $\mathscr{L}_0$:

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_\alpha)_m = \langle \mathscr{L}_\alpha, x^m \rangle &= \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}\langle D^\alpha \mathscr{L}_0, x^m \rangle \\ &= \binom{m+\alpha}{\alpha}\langle \mathscr{L}_0, x^{m-\alpha}\rangle \\ &= \binom{m+\alpha}{\alpha}(\mathscr{L}_0)_{m-\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2, ..., d-1, \quad m \geqslant 0.\end{aligned}$$

soit en changeant $m \to (d+1)\,m+\mu$, on a:

$$(\mathscr{L}_\alpha)_{(d+1)\,m+\mu} = \binom{(d+1)\,m+\mu+\alpha}{\alpha}\langle \mathscr{L}_0, x^{(d+1)\,m+\mu-\alpha}\rangle$$

$$= \binom{(d+1)m+\mu+\alpha}{\alpha}(\mathscr{L}_0)_{(d+1)m+\mu-\alpha}$$

$$= \delta_{\alpha,\mu}\binom{(d+1)m+2\alpha}{\alpha}(\mathscr{L}_0)_{(d+1)m},$$

$$\mu = 0, 1, ..., d, \quad m \geqslant 0.$$

D'où le résultat.

4.3. *Les suites de polynômes associés*

DÉFINITION 4.3. On appelle la suite associée de $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ (relativement à $\mathscr{L}_0$), la suite $\{B_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ définie par:

$$B_n^{(1)}(x) = \left\langle \mathscr{L}_0, \frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(\xi)}{x-\xi} \right\rangle, \qquad n \geqslant 0.$$

Chaque $B_n^{(1)}(x)$ est normalisé. On note par $\{\mathscr{L}_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ la suite duale de $\{B_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$.

PROPOSITION 4.1 [13]. *On a*:

$$\mathscr{L}_n^{(1)} = (x\mathscr{L}_{n+1})\,\mathscr{L}_0^{-1}, \qquad n \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Remarque 4.2. Lorsque $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ est d-orthogonale (relativement à $\Lambda = {}^t(\mathscr{L}_0, ..., \mathscr{L}_{d-1})$), elle vérifie donc les récurrences:

$$B_{m+d+1}(x) = (x - \beta_{m+d})\,B_{m+d}(x) - \sum_{\nu=0}^{d-1} \gamma_{m+d-\nu}^{d-1-\nu} B_{m+d-1-\nu}(x), \qquad m \geqslant 0,$$
$$\gamma_{n+1}^0 \neq 0, \qquad n \geqslant 0, \tag{R1}$$

avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} B_0(x) = 1, \qquad B_1(x) = x - \beta_0 \text{ et si } d \geqslant 2: \\ B_n(x) = (x - \beta_{n-1})\,B_{n-1}(x) - \sum_{\nu=0}^{n-2} \gamma_{n-1-\nu}^{d-1-\nu} B_{n-2-\nu}(x), \qquad 2 \leqslant n \leqslant d. \end{cases} \tag{R2}$$

De même, la suite $\{B_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence:

$$B_{m+d+1}^{(1)}(x) = (x - \beta_{m+d+1})\,B_{m+d}^{(1)}(x) - \sum_{\nu=0}^{d-1} \gamma_{m+d-\nu+1}^{d-1-\nu} B_{m+d-1-\nu}^{(1)}(x), \qquad m \geqslant 0, \tag{R3}$$

avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} B_0^{(1)}(x)=1, \qquad B_1^{(1)}(x)=x-\beta_1 \text{ et si } d\geqslant 2: \\ B_n^{(1)}(x)=(x-\beta_n)\,B_{n-1}^{(1)}(x)-\sum_{\nu=0}^{n-2}\gamma_{n-\nu}^{d-1-\nu}B_{n-2-\nu}^{(1)}(x), \qquad 2\leqslant n\leqslant d. \end{cases} \tag{R4}$$

Elle est donc d-orthogonale par rapport à $\Lambda^{(1)}={}^t(\mathscr{L}_0^{(1)},...,\mathscr{L}_{d-1}^{(1)})$.

4.4.

Exemple 2. Les polynômes d-orthogonaux auto-associés. Application au cas $d=2$.

On considère maintenant une suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ de polynômes d-orthogonaux auto-associée c'est-à-dire telle que:

$$B_n^{(1)}(x)=B_n(x), \qquad n\geqslant 0.$$

Alors, on a:

$$\beta_n=\beta_0, \qquad n\geqslant 0; \qquad \gamma_{n+1}^{\nu}=\gamma_1^{\nu}, \qquad n\geqslant 0 \text{ pour chaque } \nu=0,1,...,d-1.$$

On ne traite ici que le cas $d=2$ [13].

Les égalités précédentes deviennent alors:

$$\beta_n=\beta_0; \qquad \gamma_{n+1}^1=\gamma_1^1; \qquad \gamma_{n+1}^0=\gamma_1^0, \qquad n\geqslant 0.$$

On peut toujours choisir $\beta_0=0$ et $\gamma_1^0=\gamma\neq 0$. On pose $\gamma_1^1=\alpha$, donc:

$$B_0(x)=1, \qquad B_1(x)=x, \qquad B_2(x)=x^2-\alpha,$$
$$B_{n+3}(x)=xB_{n+2}(x)-\alpha B_{n+1}(x)-\gamma B_n(x), \qquad n\geqslant 0.$$

Cette suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ auto-associée est 2-orthogonale "classique." Car sa suite des dérivées, $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$, vérifie aussi une récurrence d'ordre trois:

$$Q_0(x)=1, \qquad Q_1(x)=x, \qquad Q_2(x)=x^2-\frac{2\alpha}{3},$$

$$Q_{n+3}(x)=xQ_{n+2}(x)-\alpha\frac{(n+2)(n+5)}{(n+3)(n+4)}Q_{n+1}(x)$$
$$-\gamma\frac{(n+1)(n+6)}{(n+3)(n+4)}Q_n(x), \qquad n\geqslant 0.$$

Donc 2-orthogonale.

Remarque 4.3. Lorsque $\alpha = 0$, la suite est 2-symétrique. Dans ce cas les $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ sont les polynômes 2-orthogonaux de type Tchebychev de deuxième espèce.

L'équation fonctionnelle caractérisant la suite $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ est:

$$\Psi \Lambda + D(\Phi \Lambda) = 0,$$

où $\Lambda = \begin{pmatrix} \mathscr{L}_0 \\ \mathscr{L}_1 \end{pmatrix}$, $\quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2}{\gamma} x & -\dfrac{2\alpha}{\gamma} \end{pmatrix} \quad$ et $\quad \Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_0^0(x) & \phi_0^1(x) \\ \phi_1^0(x) & \phi_1^1(x) \end{pmatrix}$,

avec $\phi_0^0(x) = \dfrac{\alpha}{6\gamma} x + \dfrac{3}{2}$, $\qquad \phi_0^1(x) = -\dfrac{1}{2} x - \dfrac{\alpha^2}{6\gamma}$,

$$\phi_1^0(x) = -\frac{4}{5\gamma} x^2 - \frac{3\alpha^2}{10\gamma^2} x - \frac{3\alpha}{10\gamma}, \qquad \phi_1^1(x) = \frac{11\alpha}{10\gamma} x + \frac{3\alpha^3}{10\gamma^2} + \frac{9}{5}.$$

Voir [6] (§6) pour les formules de calcul des coefficients de ces polynômes.

Bibliographie

1. A. Boukhemis and P. Maroni, Une caractérisation des polynômes strictement $1/p$-orthogonaux de type Sheffer, étude du cas $p = 2$, *J. Approx. Theory* **54** (1988), 67–91.
2. C. Brezinski, "Biorthogonality and Its Applications to Numerical Analysis," Dekker, New York/Basel/Hong Kong, 1992.
3. M. G. de Bruin, "Simultaneous Padé Approximation and Orthogonality," Lectures Notes in Mathematics, Vol. 1171, pp. 74–83, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo, 1985.
4. M. G. de Bruin, Convergence of generalized C-fractions, *J. Approx. Theory* **24** (1978), 177–207.
5. K. Douak, "Les polynômes orthogonaux "classiques" de dimension d," Thèse de troisième cycle, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris, 1988.
6. K. Douak et P. Maroni, Les polynômes orthogonaux "classiques" de dimension deux, *Analysis* **12** (1992), 71–107.
7. J. L. Geronimus, On polynomials orthogonal with respect to numerical sequences and on Hahn's theorem, *Izv. Akad. Nauk.* **250**, No. 4 (1940), 215–228. [in Russian]
8. W. Hahn, Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen, *Math. Z.* **39** (1935), 634–638.
9. H. L. Krall, On derivatives of orthogonal polynomials, *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** (1936), 423–428.
10. P. Maroni, L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **10**, No. 1 (1989), 105–139.
11. P. Maroni, Prolégomène à l'étude des polynômes orthogonaux semi-classiques, *Ann. Mat. Pura Appl.* **149**, No. 4 (1987), 165–184.
12. P. Maroni, Variations around classical orthogonal polynomials. Connected Problems, *in* "VII Simposium sobre polinomios ortogonales y aplicaciones, Granada, 1991," pp. 133–155, *J. Comput. Appl. Math.* **48** (1993).

13. P. MARONI, Two-dimensional orthogonal polynomials, their associated sets, and the co-recursive sets, *Numer. Algorithms* **3** (1992), 299–312.
14. J. VAN ISEGHEM, "Approximants de Padé vectoriels," Thèse d'état, Univ. des Sciences et techniques de Lille-Flandre-Artois, 1987.
15. J. VAN ISEGHEM, Polynômes orthogonaux "synthèse et extension," *Publ. IRMA* **16**, No. II, Lille, 1988.
16. J. VAN ISEGHEM, Vector orthogonal relations, vector *QD*-algorithm, *J. Comput. Appl. Math.* **19** (1987), 141–150.